

A satellite image of a river network, likely the Amazon, showing a complex, branching pattern of dark water channels against a green, forested landscape. The text is overlaid on the central part of the image.

*Determinação da
dimensão fractal
de conjunto de pontos
às imagens de satélites*

Introdução

- Uma importante aplicação dos fractais é o campo da análise da textura da imagem. O aspecto principal da geometria fractal usado em tal aplicação é o conceito de dimensão fractal para caracterizar a complexidade de uma textura.
- Uma metodologia inovadora aqui é apresentada para estimar a dimensão fractal de imagens multispectrais ou multibandas.
- A possibilidade de caracterização de texturas em imagens multispectrais abre caminho para uma gama de aplicações nas mais diversas áreas de conhecimento.

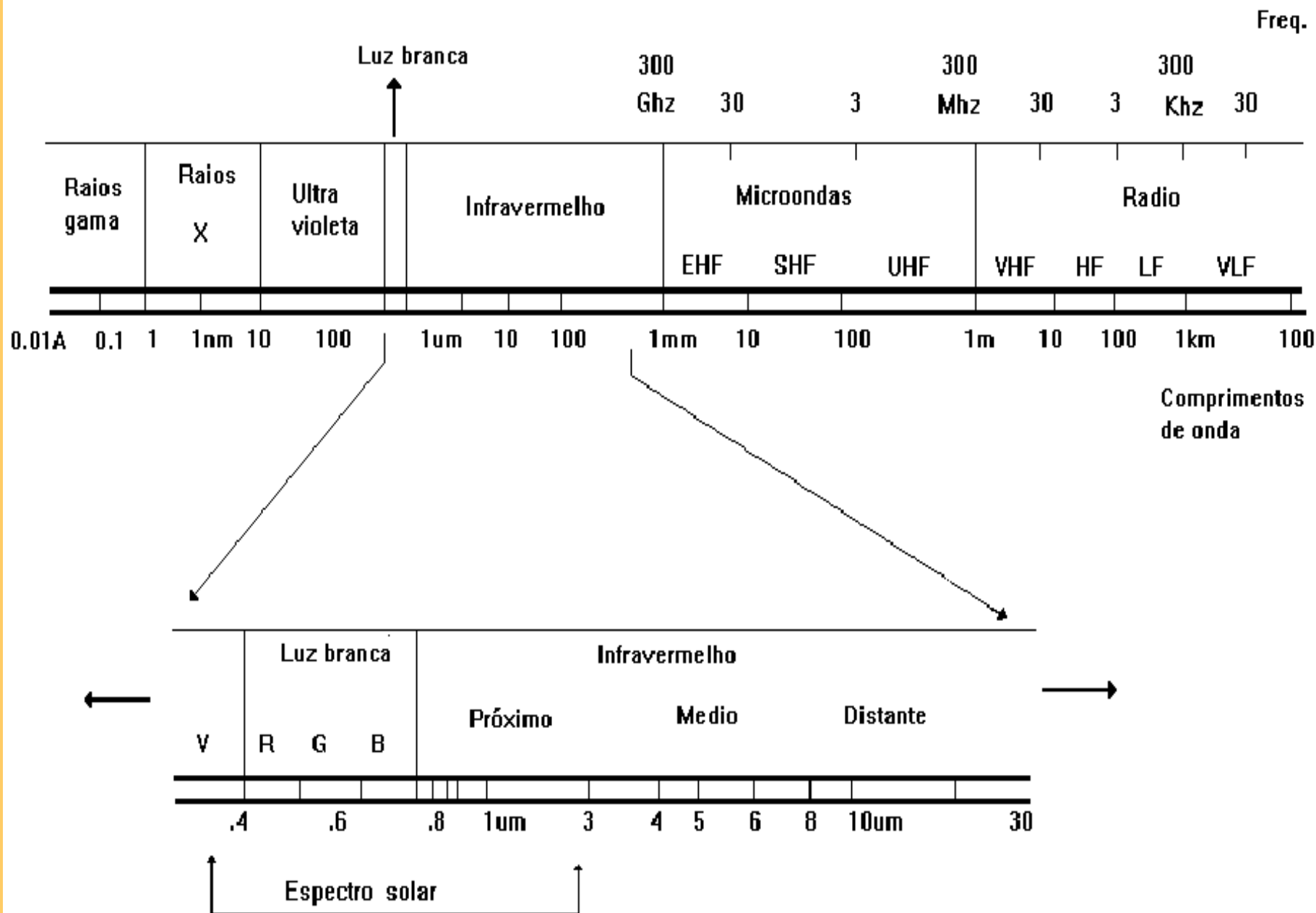
Sumário

- Introdução
- Fundamentos
 - Espectro Eletromagnético
 - Imagens Digitais
 - Imagens de Satélite
- Geometria Fractal
- Dimensão Fractal de Imagens Monocromáticas
- Dimensão Fractal de Imagens Multiespectrais
- Resultados Experimentais
- Conclusão

Espectro Eletromagnético

- Atualmente é possível gerar ou medir ondas numa faixa que varia em frequência de 1 a 10^{24} Hz, ou comprimentos com intervalo de valores entre 10^{-10} μm e 10^{+10} μm (micrômetros). Esta extensa faixa define o espectro eletromagnético.
- O espectro eletromagnético é subdividido em regiões que possuem características peculiares. Na região de raios gama e cósmicos trabalha-se com energia (elétron-volts), na região entre o Ultravioleta e o Infravermelho utiliza-se comprimento de onda (micrômetro), e na região microondas e rádio usa-se frequência (hertz).

Espectro Eletromagnético



Região	Características
I.V.	Grande importância para o Sensoriamento Remoto. Engloba radiação com comprimentos de onda de 0,75 μm a 1,0 mm. A radiação I.V. é facilmente absorvida pela maioria das substâncias (efeito de aquecimento).
Visível	É definida como a radiação capaz de produzir a sensação de visão para o olho humano normal. Pequena variação de comprimento de onda (380 a 750 nm). Importante para o Sensoriamento Remoto, pois imagens obtidas nesta faixa, geralmente, apresentam excelente correlação com a experiência visual do intérprete.

Região de Luz Visível

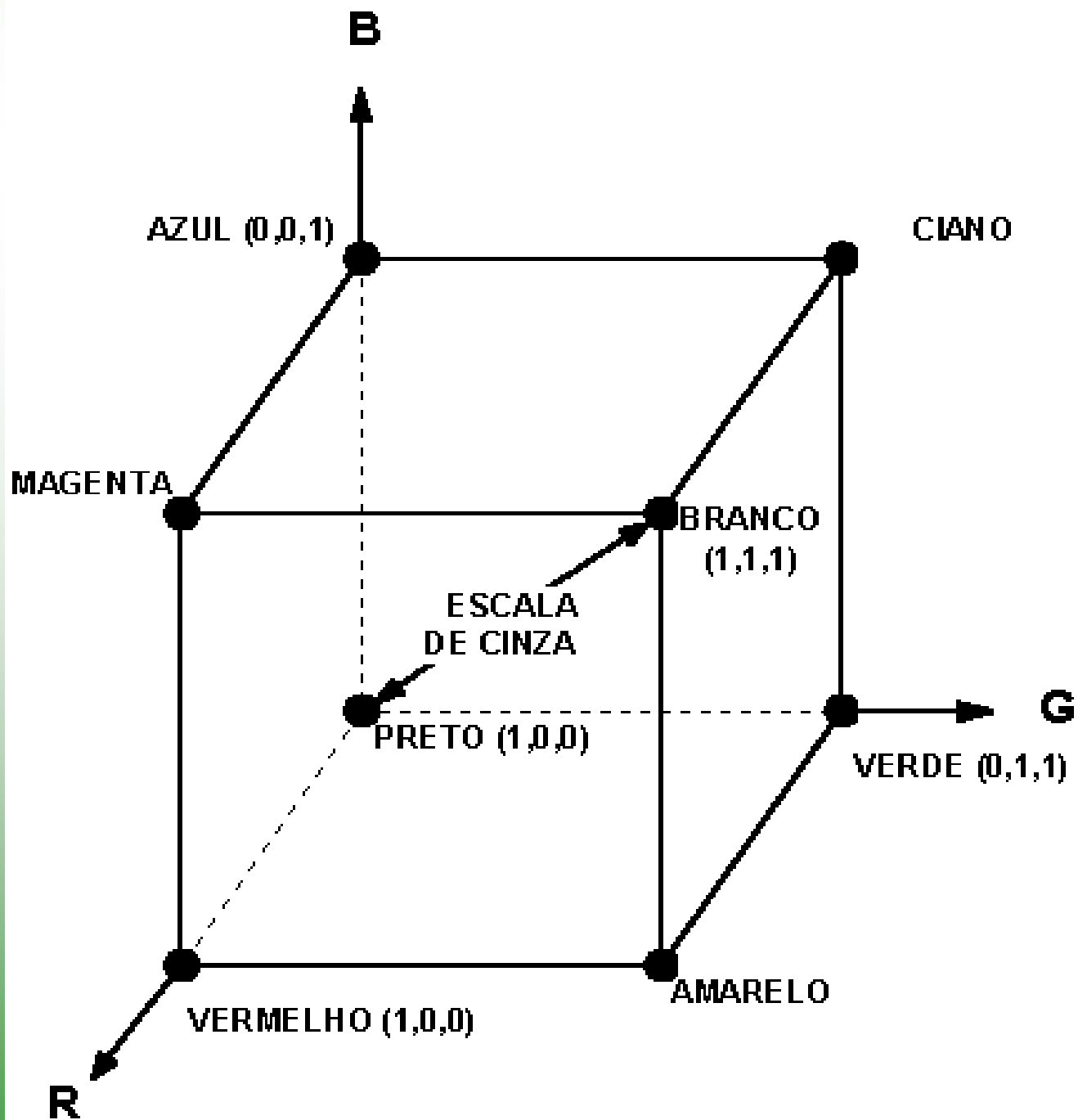
- Dependendo de sua frequência (ou comprimento de onda), uma radiação eletromagnética pode excitar ou não nosso aparelho de visão. Quando excita, denominamos de luz visível (luz branca).
- O espectro de luz visível, compreendido no intervalo de 380 a 750 nm, ocupa uma faixa muito estreita do espectro total de radiações eletromagnéticas.
- Para perceber a luz visível, o sistema visual humano possui células foto sensíveis denominadas cones e bastonetes.
- Os cones, células responsáveis pela percepção da cor, se subdividem em três categorias, com diferentes máximos de sensibilidade situados em torno do vermelho, verde e azul.

- As sensações de cor percebidas pelo sistema visual humano são baseadas na combinação das intensidades dos estímulos recebidos por cada um desses cones.
- Devido à possibilidade de se obter qualquer outra cor a partir da combinação destas três ($R=700\text{ nm}$, $G = 546,1\text{ nm}$, $B=435,1\text{ nm}$), em diferentes proporções, elas passaram a ser denominadas de cores primárias aditivas.
- A combinação das cores primária duas a duas produz as chamadas cores secundárias: Ciano, Magenta e Amarelo. A combinação das três cores primárias aditivas produz a cor branca.



Modelo RGB

- Vários modelos de representação de cores (RGB, CMY, CMYK, HSV, etc.) foram criados para permitir a especificação de cores em um formato padronizado.
- O modelo de cor RGB é representados por um sólido tridimensional onde cada cor é representado por um ponto em um sistema de coordenadas 3-D ortogonais.
- O modelo RGB se baseia em um sistema de coordenadas cartesianas representado na forma de um cubo, três de seus vértices são cores primárias (R, G, B) e os outros três são cores secundárias (C, M, Y), a escala de cinza se estende pela diagonal do cubo que sai da origem (preto) até o vértice mais distante dela (branco).

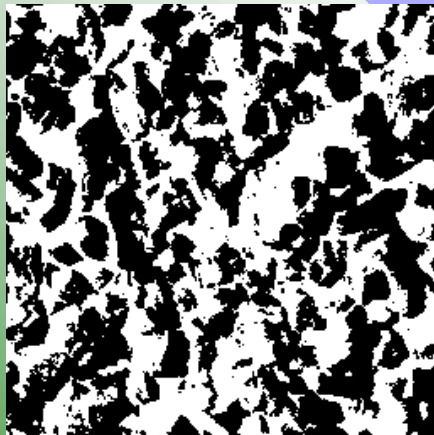


Imagens Digitais

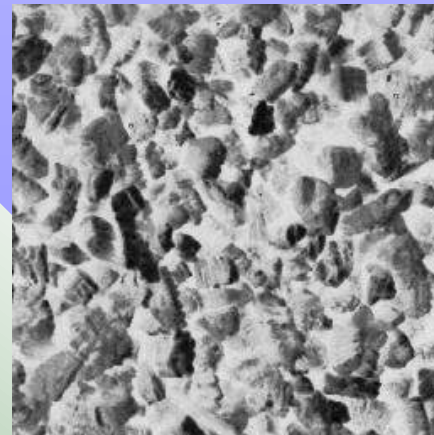
- Uma imagem pode ser definida como uma projeção de uma cena em um plano. Para ser manipulada por um computador uma imagem necessita ser convertida para forma numérica. Tal conversão é denominada de digitalização.
- A digitalização é um processo que converte uma imagem de uma cena real em uma imagem digital. A imagem digital é obtida pela partição da área da imagem em uma matriz bidimensional finita ($m \times n$), cujas células (“pixels”) recebem valores correspondentes à intensidade luminosa naquela região.

- Imagens monocromáticas são imagens digitais onde cada pixel possui representação em apenas um canal de cor. As imagens monocromáticas podem ser binárias ou em escala de cinza.
- Se os pixels destas imagens tiverem apenas a opção de estar aceso ou apagado (0 ou 1) tem-se uma imagem binária.
- Se os pixels destas imagens puderem assumir valores geralmente na faixa de 0 a 255, então tem-se uma imagem em escala de cinza.

**imagem
binária**



**Imagem em
escala de cinza**

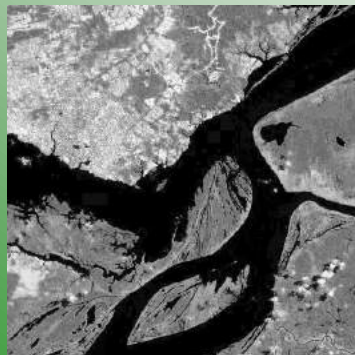


- Imagens multibandas são imagens digitais onde cada pixel possui n bandas espectrais.
- As imagens multibandas podem ser imagens coloridas ou de satélite.
- Nas imagens coloridas os pixels possuem representação nos três canais visíveis. Geralmente assumindo uma faixa de valores que ocupa um byte (entre 0 e 255). Estes são combinados para produzir o conjunto de cores da imagem.

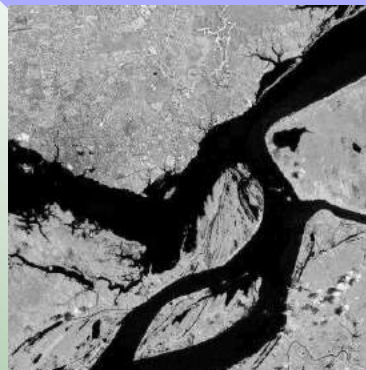
- É comum o processamento de imagens digitais coloridas manipulando separadamente cada canal de cor. Neste caso, a imagem se reduz a três imagens em escala de cinza, uma para cada canal vermelho (Red), verde (Green) e azul (Blue).



**Imagem
Colorida**



Canal Red



Canal Green



Canal Blue

- Imagens de satélite são imagens multibandas onde, para cada coordenada (x,y) , existe um conjunto de valores de nível de cinza. Cada pixel é representado por um vetor, com tantas dimensões quanto forem às bandas espectrais.
- Tais imagens se constituem de uma coleção de imagens de uma mesma cena, num mesmo instante, obtida por vários sensores com respostas espectrais diferentes.

Banda 1



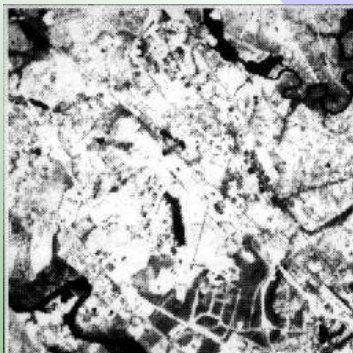
Banda 2



Banda 3



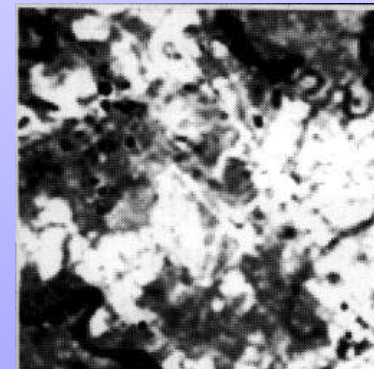
Banda 4



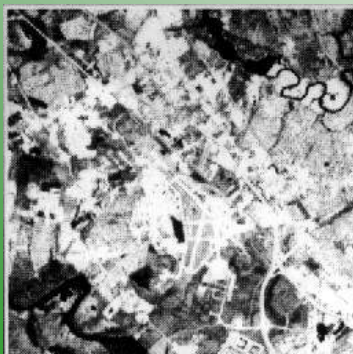
Banda 5



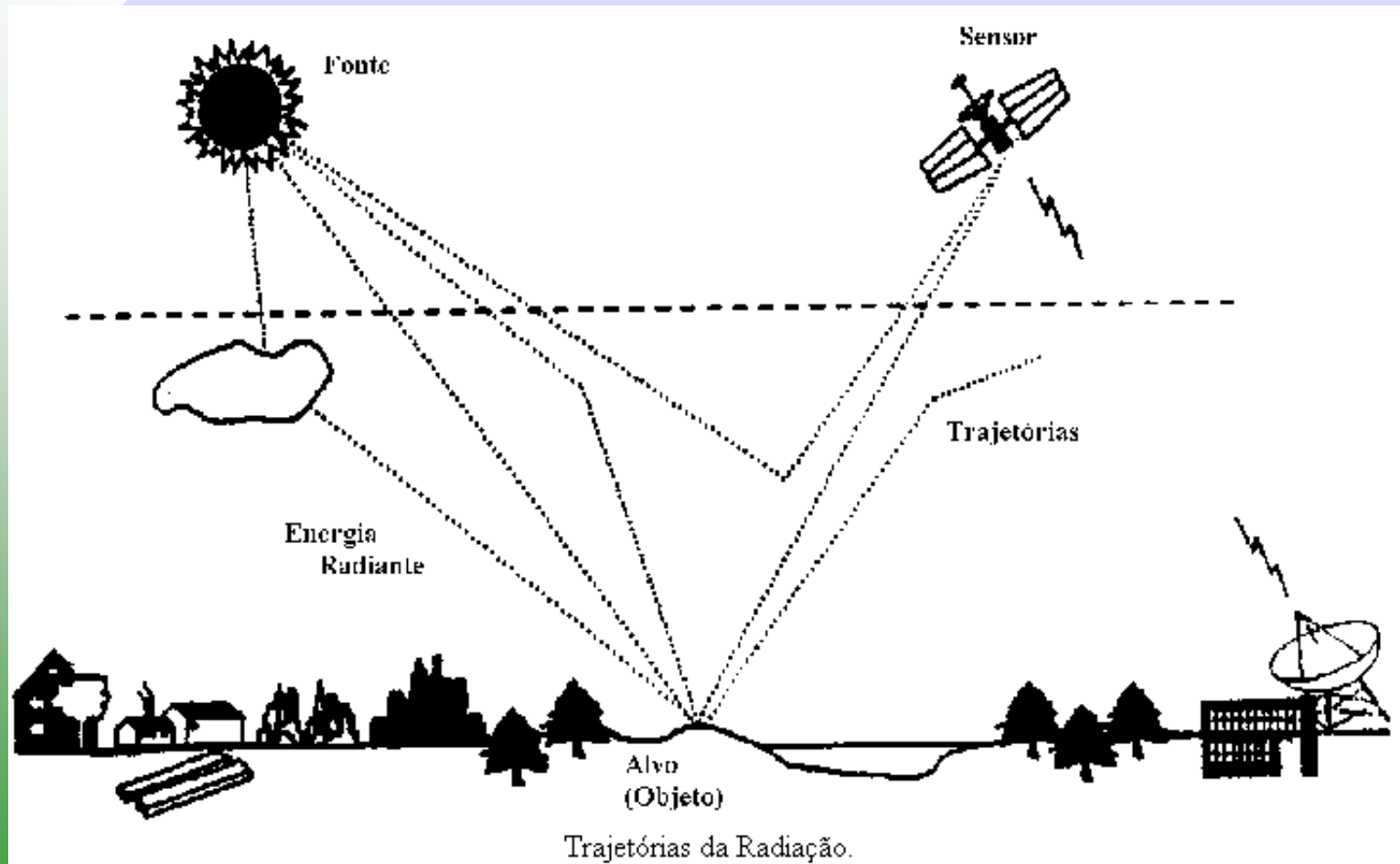
Banda 6



Banda 7



- Os satélites utilizam sensores remotos, sistemas fotográficos ou óptico-eletrônicos capazes de detectar e registrar o fluxo de energia radiante refletido ou emitido por objetos distantes.



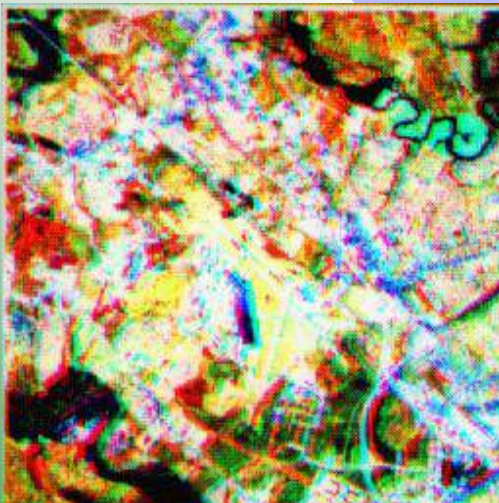
- A resolução de um sistema sensor é uma medida da habilidade do instrumento e pode ser classificada em espacial, espectral, radiométrica e temporal.
- A **resolução espacial** é determinada pela área da superfície terrestre observada instantaneamente por cada sensor.
- A **resolução espectral** é definida pelo número de bandas do espectro eletromagnético imageadas (usadas para formar a imagem).
- A **resolução radiométrica** está associada à sensibilidade do sistema sensor em distinguir dois níveis de intensidade do sinal de retorno.
- A **resolução temporal** relaciona-se com o intervalo entre duas passagens do satélite pelo mesmo ponto.

Características de resolução dos sistemas sensores	TM	HRV	AVHRR
Resolução espacial	30 m 120 m (Banda 6)	20 m (Banda 1 a 3) 10 m (Pan)	1.1 Km (nominal)
Resolução espectral bandas espectrais (micrômetros)	Banda 1 - 0.45-0.52 Banda 2 - 0.52-0.60 Banda 3 - 0.63-0.69 Banda 4 - 0.76-0.90 Banda 5 - 1.55-1.75 Banda 6 - 10.74-12.5 Banda 7 - 2.08-2.35	Banda 1 - 0.50-0.59 Banda 2 - 0.61-0.68 Banda 3 - 0.79-0.89 Pan - 0.51-0.73	Banda 1 - 0.58-0.68 Banda 2 - 0.725-1.1 Banda 3 - 3.55-3.93 Banda 4 - 10.30-11.30 Banda 5 - 11.50-12.50
Resolução radiométrica	8 bits	8 bits (1-3) 6 bits (Pan)	10 bits
Resolução temporal	16 dias	26 dias	2 vezes ao dia

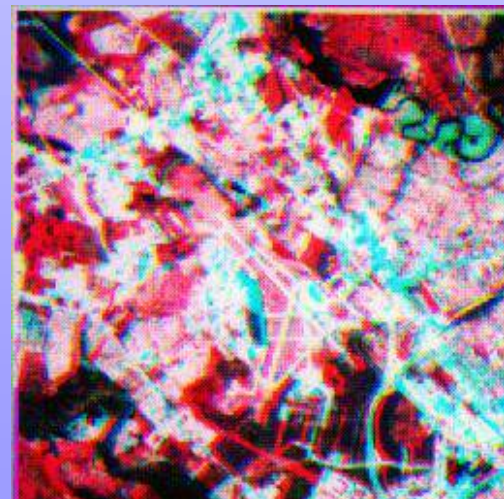
Satélite Landsat - Sensor TM

Canal	Faixa Espectral (μm)	Principais aplicações
1	0.45 - 0.52	Mapeamento de águas costeiras Diferenciação entre solo e vegetação Diferenciação entre vegetação coníferas e decídua
2	0.52 - 0.60	Reflectância de vegetação verde sadia
3	0.63 - 0.69	Absorção de clorofila Diferenciação de espécies vegetais
4	0.76 - 0.90	Levantamento de biomassa Delineamento de corpos d'água
5	1.55 - 1.75	Medidas de umidade da vegetação Diferenciação entre nuvens e neve
6	10.4 - 12.5	Mapeamento de estresse térmico em plantas Outros mapeamentos térmicos
7	2.08 - 2.35	Mapeamento hidrotermal

- As imagens multiespectrais de sensoriamento remoto podem ser visualizadas na forma de composições coloridas de três bandas associadas aos canais **Red**, **Green** e **Blue**.
- Tais composições, são capazes de sintetizar numa única imagem uma grande quantidade de informação facilitando a interpretação de alvos através da representação dessa informação em diferentes cores.



Banda 4 (R), 5 (G), 3 (B)



Banda 4 (R), 3 (G), 2 (B)

Texturas

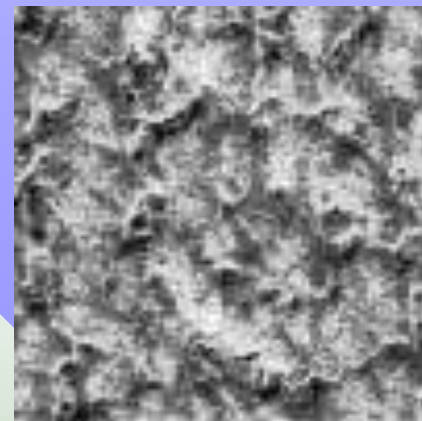
- Apesar da grande possibilidade de extração de dados a partir da combinação de diferentes bandas espectrais, ainda existem problemas na distinção de regiões.
- Somente uma análise da textura permitiria a distinção de regiões com **mesmas características de reflectância** (e portando mesmas cores em determinada combinação de bandas).
- Assim, a etapa seguinte para melhorar a análise de imagens deve ser reunir as possibilidades das multibandas com **análise de textura**.

- Textura é uma propriedade de uma região que descreve o padrão de variação de tons de cinza e cor numa determinada área.
- A textura se caracteriza pela repetição de um modelo sobre uma região. Este modelo pode ser repetido de forma exata ou com pequenas variações sobre um mesmo tema. Tamanho, formato, cor e orientação dos elementos do modelo (denominados de “textons”) podem variar sobre as regiões.
- A variação encontrada na forma como os “textons” se relacionam é suficiente para diferenciar duas texturas.

Textura 1



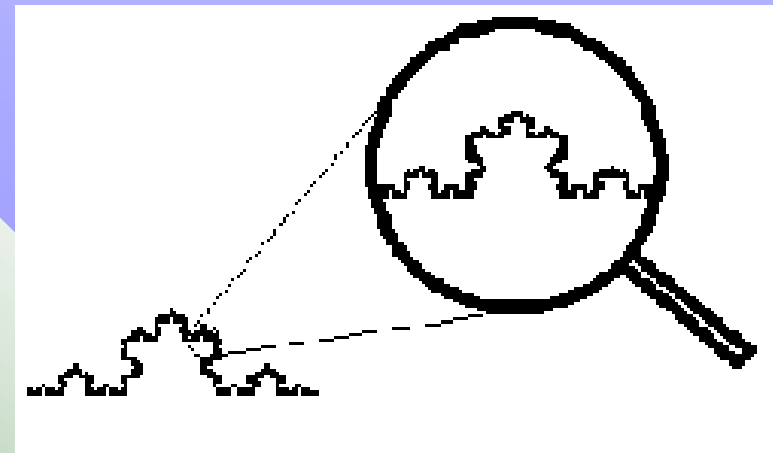
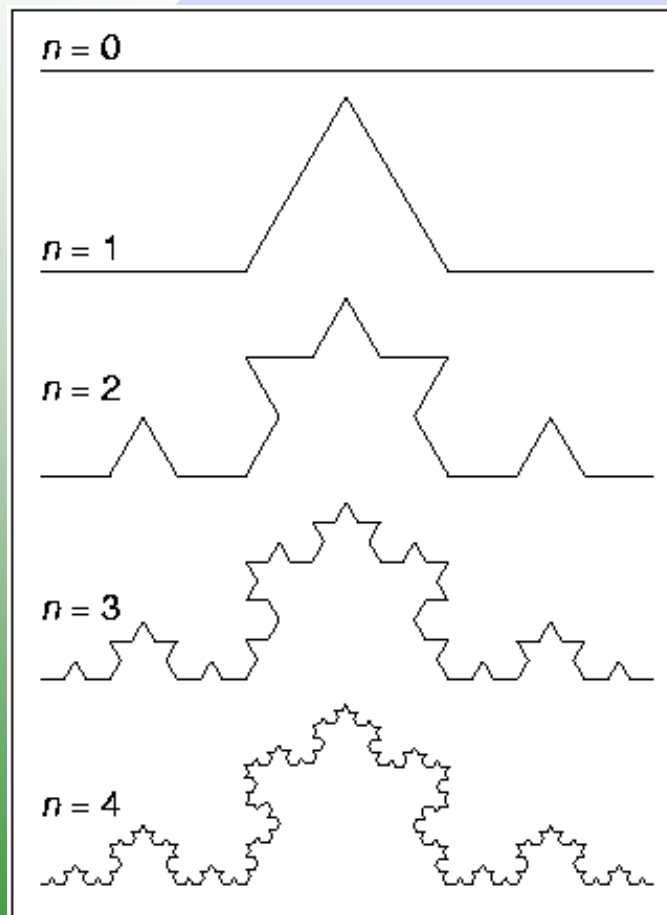
Textura 2



Geometria Fractal

- A teoria dos Fractais consiste da caracterização de duas propriedades principais que são associadas aos objetos: a **dimensão fractal** e a **auto-semelhança**.
- A **dimensão fractal** é uma medida que quantifica a densidade das fractais no espaço métrico em que são definidas e serve para compará-las.
- A **auto-semelhança** é uma característica que os objetos fractais possuem de cada pequena porção sua poder ser vista como uma réplica reduzida do todo.

- A curva de Koch, exemplifica essa característica. Esta curva é uma estrutura estritamente auto-semelhante, pois cada quarta parte dela é uma cópia em escala da estrutura inteira



- Uma das noções mais intuitivas de dimensão está associada à escala e auto-semelhança.
- A reta, um objeto de dimensão 1, se dividido em N partes idênticas, cada parte será idêntica a original multiplicada por um fator de escala de $r = 1/N$, e $N \times r^1$ reconstituirá o objeto.
- O quadrado, objeto de dimensão 2, se dividido em N partes idênticas, cada parte será idêntica a original multiplicada por um fator de escala de $r = \sqrt{1/N}$, e $N \times r^2$ reconstituirá o objeto.
- O cubo, objeto de dimensão 3, se dividido em N partes idênticas, cada parte será idêntica a original multiplicada por um fator de escala de $r = \sqrt[3]{1/N}$, e $N \times r^3$ reconstituirá o objeto.

- Assim, a dimensão por auto-semelhança DS deve ser tal que :

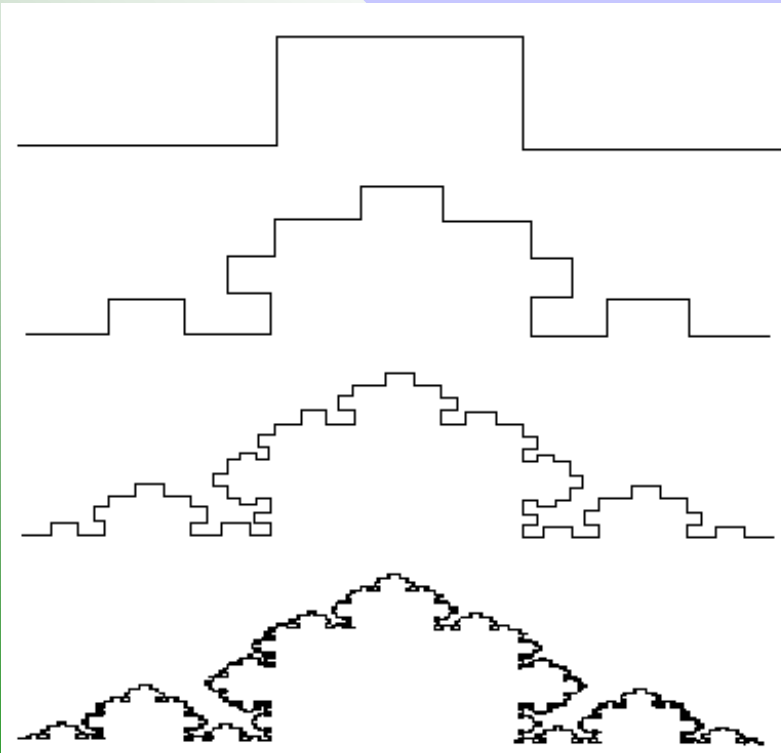
$$N \times r^{DS} = 1 \rightarrow N = (1/r)^{DS} \rightarrow \log N = DS \log (1/r),$$

então:

- **$DS = \log N / \log (1/r)$**
- onde: **DS** é a Dimensão por auto-semelhança, **N** indica o número de partes auto-semelhantes para reconstruir a figura original e **r** representa o escalonamento da figura original.
- A dimensão dos objetos fractais é fracionária enquanto que a dimensão dos objetos euclidianos é inteira.



$$DS = \frac{\log 2}{\log 3} \rightarrow DS \cong 0,63$$



$$DS = \frac{\log 5}{\log 3} \rightarrow DS \cong 1,47$$

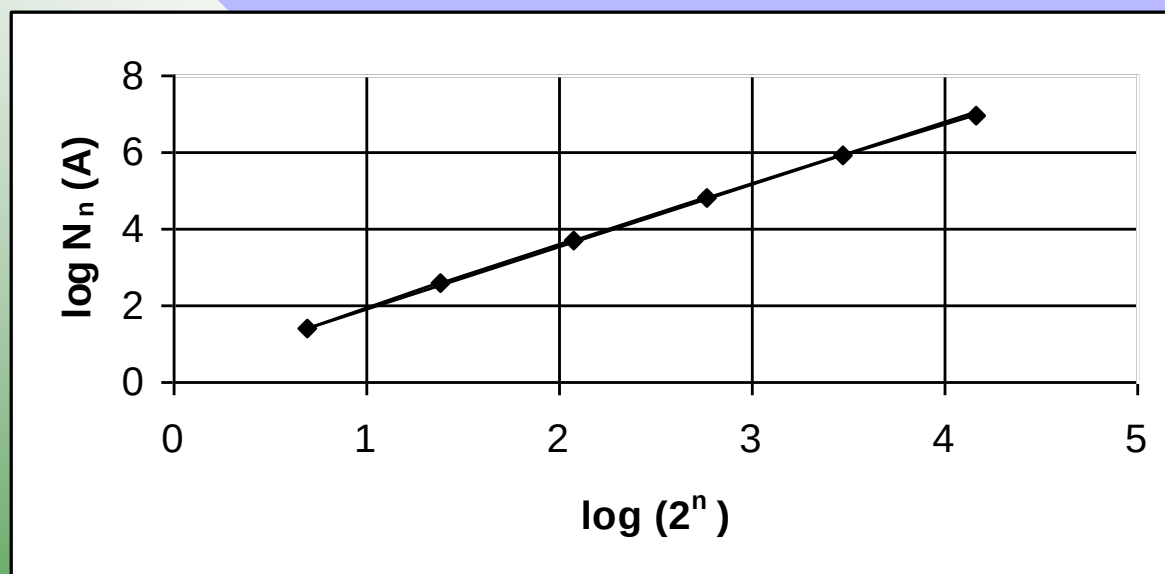
Estimando a Dimensão Fractal de Imagens Binárias

- O teorema da contagem dos cubos (Box Counting Theorem) oferece um método simples para estimar a dimensão fractal de imagens binárias (2D). Para exemplificar a técnica será considerado o conjunto físico indicado por A , onde A pode ser visto como a fractal triângulo de Sierpinsky. Um sistema de coordenadas cartesianas é montado e, é realizada uma contagem do número de “quadrados” de área $N_n(A)$ de lado $1/2^n$ o qual “cobre” A , então:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \log N_n(A) / \log 2^n$$

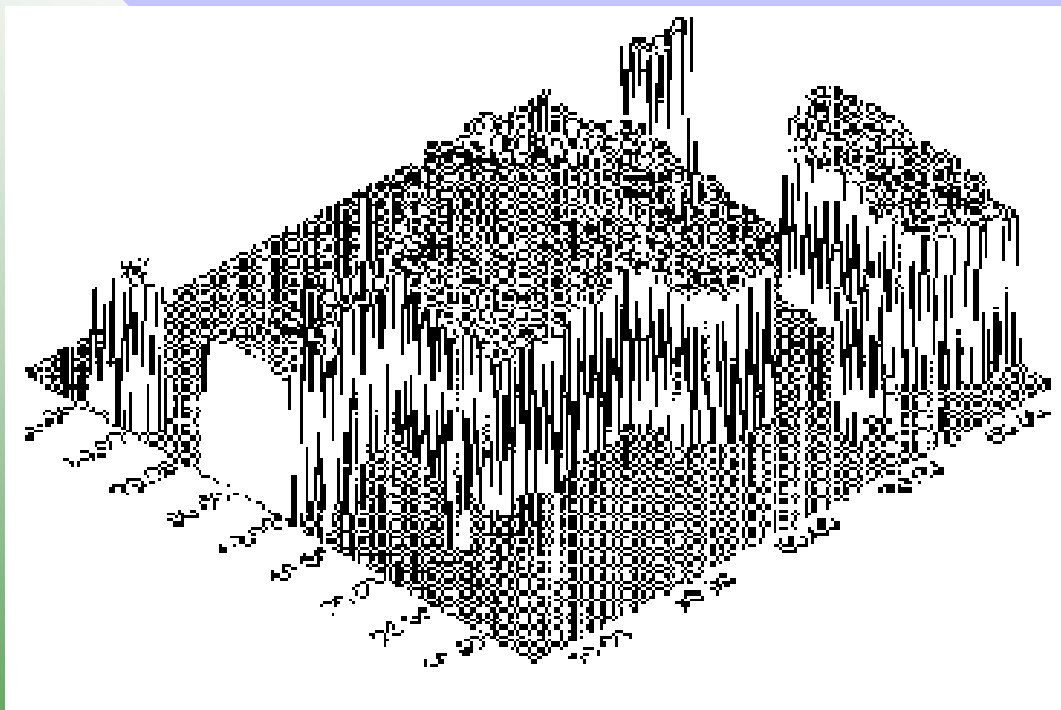
Demonstração

n	$N_n (A)$	2^n	$\log N_n (A)$	$\log 2^n$
1	4	2	1,386	0,693
2	12	4	2,484	1,386
3	36	8	3,583	2,079
4	108	16	4,682	2,772
5	324	32	5,780	3,465
6	972	64	6,879	4,158

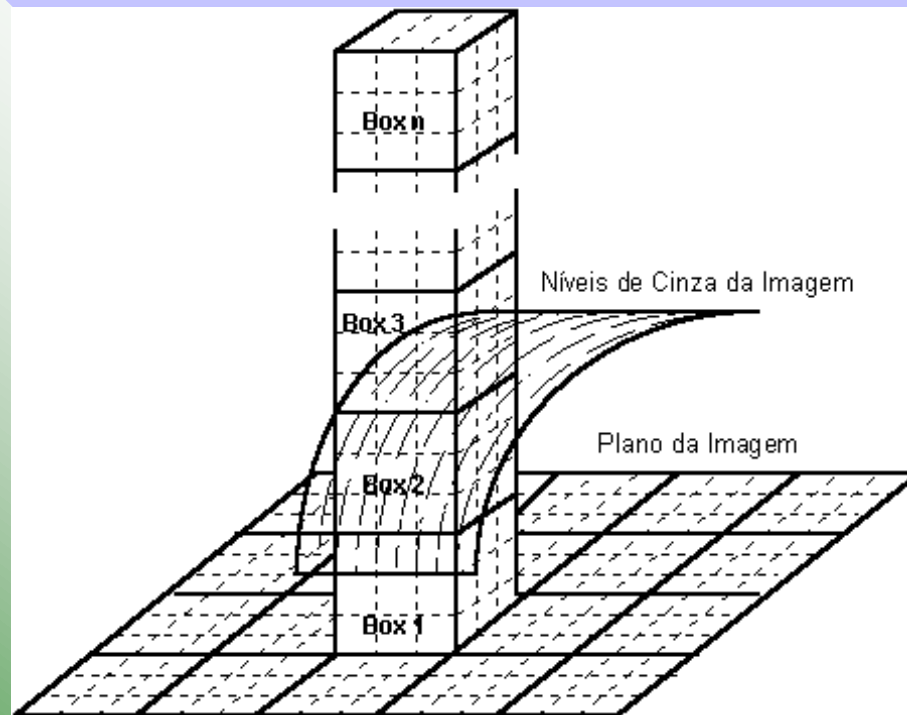


Estimando a Dimensão Fractal de Imagens em Escala de Cinza

- Uma extensão simples do teorema da contagem de cubos para estimar DF de imagens em escala de cinza é considerar a imagem como um objeto tridimensional, onde a terceira coordenada representa a intensidade do pixel.



- O espaço, onde a imagem está modelada, é subdividido em cubos de lados $S \times S \times S'$, onde S é um múltiplo do tamanho da Matriz de pixels e S' é múltiplo da intensidade de cinza.
- Os quadrados agora são substituídos por cubos e $N_n(A)$ denota o número de cubos que interceptam a imagem também na direção da intensidade do pixel.



- A equação utilizada é : $D_n = \text{Log}(N_n) / \text{Log } 2^n$

Onde N_n é o número cubos que interceptam a imagem representada.

- O cálculo de N_n é feito com base nos tons de cinza dos pixels do grid (i,j) da seguinte forma:

$N_n = \sum n_n(i,j)$, onde

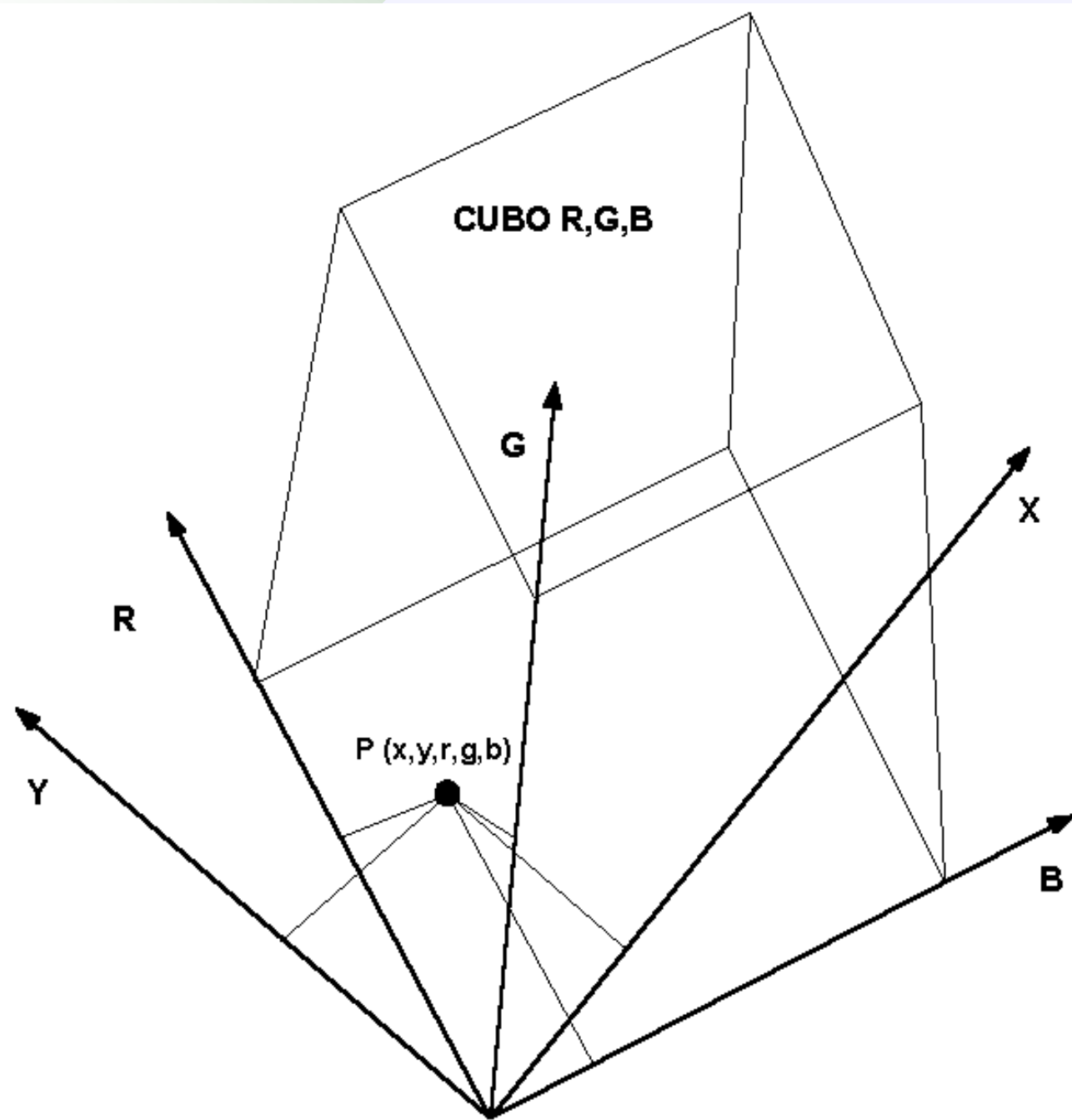
$n_n(i,j) = \text{int}(\text{cinza_max} - \text{cinza_min}(i,j)/s') + 1$

- N_n é tomado para os diferentes valores de n , isto é, para diferentes tamanhos de grids. Esta forma de contagem de fornece uma melhor aproximação dos cubos que interceptam a superfície dos níveis de cinza da imagem.

Estimando a Dimensão Fractal de Imagens Multiespectrais

- Vimos anteriormente que podemos considerar uma imagem em níveis de cinza como um objeto tridimensional, onde a terceira coordenada representa a intensidade do pixel na escala de cinza. Assim, a sua DF poderia assumir valores no intervalo entre 2 e 3.
- Uma imagem multiespectral de sensoriamento remoto é composta por uma coleção de imagens de uma mesma cena, num mesmo instante, em diversas bandas espectrais, que podem ser visualizadas na forma de composições coloridas de três bandas, cada uma associada a um dos canais RGB. A representação da cor C de cada pixel da imagem pode ser obtida matematicamente por: $C = b_1.R + b_2.G + b_3.B$

- Onde **R**, **G** e **B** são as três cores primárias e **b_1** , **b_2** e **b_3** são os coeficientes de mistura correspondentes a cada uma das três bandas espectrais que compõe a imagem. Dessa forma, a cor **C** de cada pixel da imagem pode ser plotada no espaço de cores RGB usando-se os coeficientes de mistura (b_1, b_2, b_3) como coordenadas.
- Uma imagem colorida, portanto, pode ser considerada como um **objeto pentadimensional** (modelada como um subconjunto do espaço $\mathbf{N}^5$), onde cada pixel possui coordenadas (**x** , **y** , **b_1** , **b_2** , **b_3**)
- Uma vez nossa noção do mundo é tridimensional, temos dificuldades para mentalizarmos objetos de dimensão superiores a 3D. O conhecimento das propriedades desses objetos, portanto, torna-se fundamental para compreendermos como calcular a dimensão fractal de imagens coloridas.

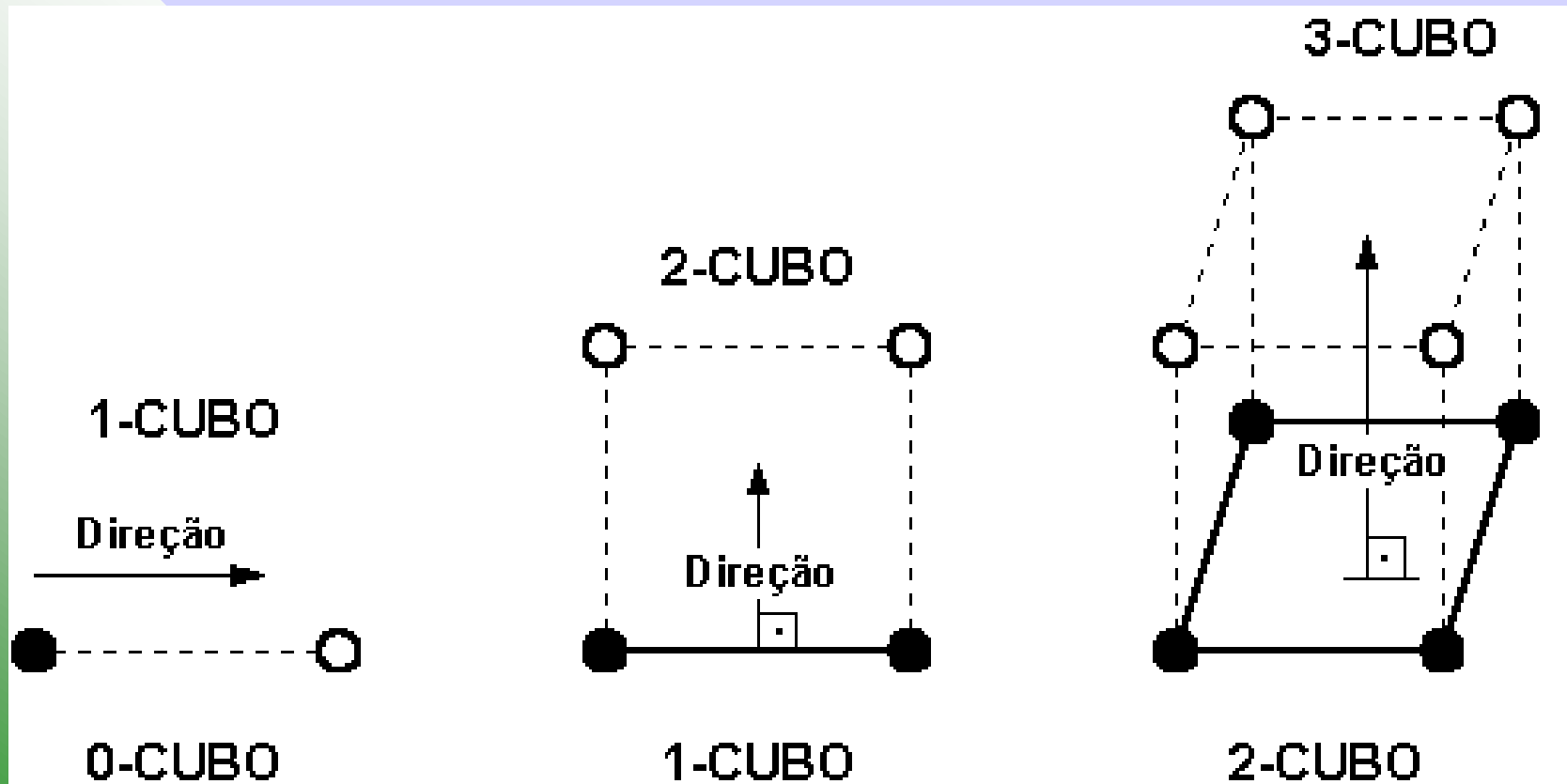


- Para compreendermos as propriedades dos espaços com dimensão superior a 3D e os objetos geométricos desses espaços, devemos examinar com atenção as propriedades dos objetos de dimensão um, dois e três, verificando, fundamentalmente, como se realiza o processo de construção de tais objetos a partir dos objetos de dimensões inferiores.
- Consideremos, então, as propriedades dos seguintes objetos:
 - **ponto** - objeto de dimensão nula;
 - **segmento** - objeto unidimensional;
 - **quadrado** - objeto bidimensional e
 - **cubo** - objeto tridimensional.

- Podemos verificar que os objetos de menor dimensão são partes constitutivas dos objetos de dimensão superior.
- O **segmento** (1D) tem extremos que são pontos (0D).
- O **quadrado** (2D) possui arestas que são segmentos (1D) e vértices que são pontos (0D).
- O **cubo** (3D) possui faces que são quadrados (2D), arestas que são segmentos (1D) e vértices que são pontos (0D).
- Podemos concluir que um objeto de dimensão nD serão constituídos de objetos **0D, 1D, 2D, 3D, ..., (n-1) D**.

- Agora importa saber como estas partes se relacionam na construção dos objetos. Por comodidade vamos denominar "cubos" a todos os objetos, mas identificar a respectiva dimensão.
- Assim, o **0-cubo** é o ponto (zero dimensional), o **1-cubo** é o segmento (unidimensional), o **2-cubo** é o quadrado (bidimensional), o **3-cubo** é o cubo usual (tridimensional), o **4-cubo** é o hipercubo (tetradimensional) e assim por diante.
- Podemos observar que o movimento de um ponto (0-cubo) numa direção forma um segmento, o movimento de um segmento (1-cubo) numa direção que lhe seja perpendicular forma um quadrado e, de forma semelhante, o movimento de um quadrado (2-cubo) forma um cubo (3-cubo) .

- Generalizando, podemos concluir que um d-cubo pode ser formado movendo o $[d-1]$ -cubo numa direção que lhe seja perpendicular (essa técnica de geração de objetos por deslocamento é conhecida como "sweep" em Modelagem Geométrica.).



- A partir da terceira dimensão, temos dificuldade de imaginar uma direção que seja perpendicular às demais. Assim, nossa realidade tridimensional nos permite apenas formular uma noção incompleta ou distorcida dos objetos de dimensões superiores.
- Um artifício que permite deduzir as propriedades desses objetos é o mecanismo do “m-cubo a mover-se no tempo”.
- O **m-cubo** é um cubo de dimensão inferior ao cubo cuja dimensão queremos considerar.

- Por exemplo, considerando a figura anterior, podemos observar que ao término do movimento de um ponto (0-cubo) teremos um segmento (1-cubo) e o dobro de vértices (o vértices inicial e o final).
- Se considerarmos, agora, o movimento de um segmento (1-cubo), ao final do seu movimento teremos um quadrado (2-cubo) composto de quatro segmentos (o segmento inicial e o final, após o término do movimento, mais dois segmentos formados a partir do movimento dos vértices extremos do segmento original).
- Finalmente, se considerarmos o movimento de um quadrado (2-cubo), ao seu término teremos um cubo (3-cubo) composto de seis quadrados (o quadrado inicial e o final, após o término do movimento, mais quatro quadrados formados a partir do movimento dos quatro segmentos do quadrado original).

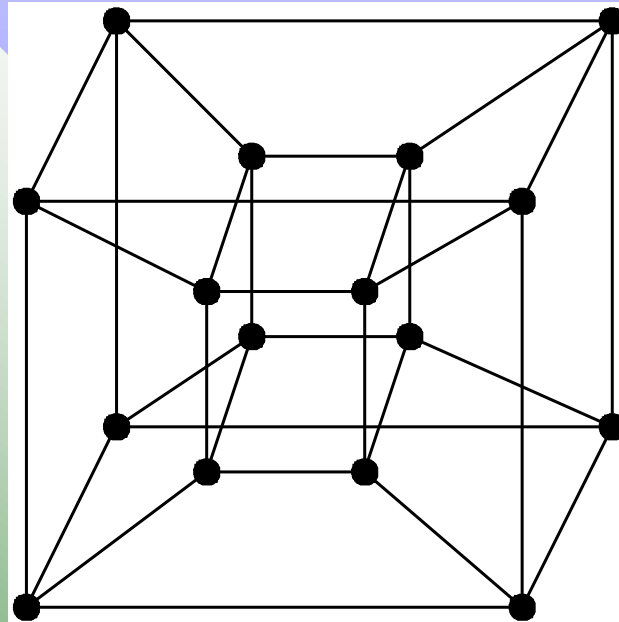
- Generalizando, o número de vértices de um d-cubo são os vértices do m-cubo antes de iniciar o seu movimento, mais os vértices do m-cubo quando este atinge o fim de seu movimento.
- Assim, o d-cubo tem **2^n vértices**. Se quisermos saber o número de m-cubos existentes num d-cubo, basta obtermos **duas vezes o número de m-cubos num [d-1]-cubo** (os que estão em cima e os que estão em baixo) **mais o número de [m-1]-cubos existentes num [d-1]-cubo** (cada um percorre um m-cubo, quando o [m-1]-cubo se move de baixo para cima).
- Isto significa que, se soubermos o número de partes de um m-cubo, poderemos determinar o número de partes de um d-cubo (uma dimensão acima).

- Por exemplo, vamos supor que desconhecêssemos a estrutura de um cubo (objeto da terceira dimensão). Mas conhecêssemos o ponto (0-cubo), o segmento (1-cubo) e o quadrado (2-cubo) (objetos de dimensão inferiores).
- Se quiséssemos saber quantos **vértices** tem num cubo (3-cubo) bastaria dobrar o número de vértices do quadrado, ou seja, o cubo teria 8 vértices.
- Se, agora, quiséssemos saber quantos **segmentos** um cubo possui bastaria calcularmos o dobro do número de segmentos num quadrado, ou seja, oito (quatro do quadrado de baixo, antes do início do movimento e quatro do quadrado de cima ao término do movimento). Mais o número de vértices existentes num quadrado (cada vértice percorre um segmento, quando o vértice se move de baixo para cima. Ou seja, quatro. Assim, um cubo teria doze segmentos.

- Finalmente, se quisermos saber quantos **quadrados** existem num cubo, bastaria obtermos duas vezes o número de quadrados num quadrado, ou seja, dois (o quadrado de baixo, antes do início do movimento e o quadrado de cima ao término do movimento). Mais o número de seguimentos existentes num quadrado (cada seguimento percorre um quadrado, quando o seguimento se move de baixo para cima. Ou seja, quatro. Assim, um cubo teria seis quadrados.

Formas		m-cubo									
d-cubo	N	m=0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	4	4	1	0	0	0	0	0	0	0
	3	8	12	6	1	0	0	0	0	0	0
	4	16	32	24	8	1	0	0	0	0	0
	5	32	80	80	40	10	1	0	0	0	0
	6	64	192	240	160	60	12	1	0	0	0
	7	128	448	672	560	280	84	14	1	0	0
	8	256	1024	1792	1792	1120	448	112	16	1	0
	9	512	2034	4608	5376	4032	2016	672	144	18	1

- A partir dos dados da tabela podemos verificar, por exemplo, que o 4-cubo possui 16 vértices, 32 arestas, 24 quadrados e 8 cubos. Isto nos dá uma idéia da estrutura de um objeto tetradimensional. Através de técnicas como **seqüência de projeções** (sombras tridimensionais do objeto) ou **sucessões de fatias** tridimensionais, é possível reconstruir esse objeto em nossa mente. A figura abaixo ilustra uma projeção de um 4-cubo.

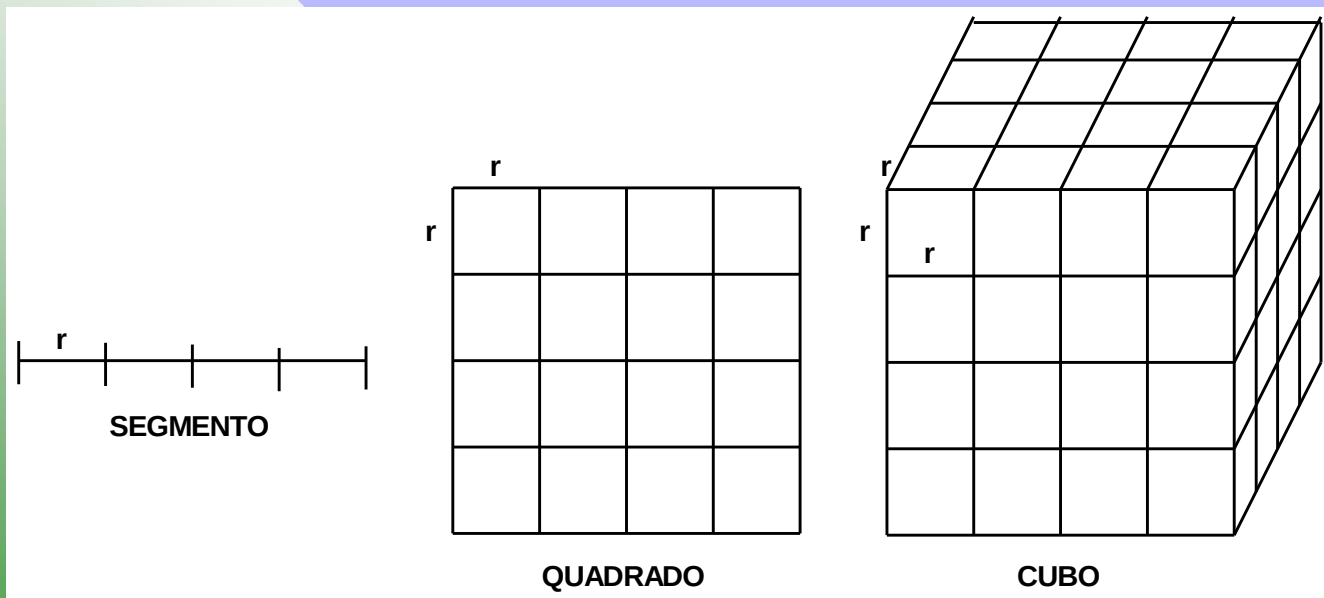


- Os métodos conhecidos para determinação da dimensão fractal de imagens binárias e monocromáticas, modeladas respectivamente nos espaços $\mathbb{N}^2$ e $\mathbb{N}^3$ dividem recursivamente o **espaço $\mathbb{N}^2$ em partes quadradas** de tamanho r (objeto bidimensional) ou o **espaço $\mathbb{N}^3$ em partes cúbicas** de tamanho r (objeto tridimensional). Em seguida, realizam a contagem do número de **quadrados** ou **cubos** que estiverem interceptando as imagens binárias e monocromáticas respectivamente.
- Generalizando, podemos supor que a determinação experimental da dimensão fractal de imagens multidimensionais (com múltiplos canais) implicará na divisão recursiva do **espaço $\mathbb{N}^d$ em partes d-cúbicas** de tamanho r seguido da contagem dos **d-cubos** que interceptarem a imagem.

- O método aqui proposto para se determinar a dimensão fractal de imagens multidimensionais poderia então ser chamado de **CDC** (*Contagem de D -Cubos*), uma vez que é uma extensão dos conceitos expostos pelos outros métodos, com a vantagem de permitir calcular a dimensão fractal de imagens de qualquer dimensão.
- Nas imagens binárias o espaço $\mathbb{N}^2$ é dividido por **2-cubos** de lados iguais $L_1 \times L_2$ de tamanho $1/2^n$, onde L_1 e L_2 correspondem aos eixos das coordenadas x,y da matriz de pixels da imagem, e o número de **$N_{2-cubos}$** que interceptam a imagem é contado.

- Nas imagens monocromáticas o espaço $\mathbb{N}^3$ é dividido por **3-cubos** de lados iguais $L_1 \times L_2 \times L_3$ de tamanho $1/2^n$, onde L_1 e L_2 correspondem aos eixos das coordenadas x,y da matriz de pixels da imagem e L_3 corresponde ao nível da intensidade de cinza da imagem, e o número de $N_{3\text{-cubos}}$ que interceptam a imagem é contado.
- Para imagens coloridas o espaço $\mathbb{N}^5$ é dividido por **5-cubos** de lados iguais $L_1 \times L_2 \times L_3 \times L_4 \times L_5$ de tamanho $1/2^n$, onde L_1 e L_2 correspondem aos eixos das coordenadas x,y da matriz de pixels da imagem e L_3 , L_4 e L_5 são múltiplos do nível da cor no canal considerado (**RGB**), e o número de $N_{5\text{-cubos}}$ que interceptam a imagem é contado.
- Nas imagens de satélite, conforme o número n de bandas espectrais consideradas, o espaço $\mathbb{N}^d$ é dividido por **d-cubos** de tamanho $1/2^n$ e o número de $N_{d\text{-cubos}}$ que interceptam a imagem é contado.

- Mas como dividir um espaço $\mathbb{N}^d$ por **d-cubos**, sendo $d > 3$?
- Quantos **d-cubos** existem numa determinada divisão recursiva do espaço $\mathbb{N}^d$?
- Para responder estas perguntas, precisamos observar novamente como objetos de dimensões conhecidas se comportam em divisões recursivas:



1-cubo (segmento)

Dimensão (d)	Divisões (n)	$N_{n,1\text{-cubos}}$	Regra
1	1	2	2^1
	2	4	2^2
	3	8	2^3

2-cubo (quadrado)

Dimensão (d)	Divisões (n)	$N_{n,2\text{-cubos}}$	Regra
2	1	4	2^2
	2	16	2^4
	3	64	2^6

3-cubo (cubo)

Dimensão (d)	Divisões (n)	$N_{n,3\text{-cubos}}$	Regra
3	1	8	2^3
	2	64	2^6
	3	512	2^9

- Assim o número de **1-cubos** pode ser determinado pela expressão:

$$N_{n,1\text{-cubos}} = 2^{1 \times n}, \text{ onde } n \text{ é o número de divisões.}$$

- O número de **2-cubos** pode ser determinado pela expressão:

$$N_{n,2\text{-cubos}} = 2^{2 \times n}, \text{ onde } n \text{ é o número de divisões.}$$

- Da mesma forma, o número de **3-cubos** pode ser determinado pela expressão:

$$N_{n,3\text{-cubos}} = 2^{3 \times n}, \text{ onde } n \text{ é o número de divisões.}$$

- Generalizando, podemos concluir que o número de partes idênticas da divisão recursiva de um **d-cubo**, pode ser obtido pela expressão:

$N_{n,d-cubos} = 2^d \times n$, onde **d** é a dimensão considerada e **n** é o número de divisões.

- A dimensão fractal de imagens **d-dimensionais**, então, pode ser obtida empregando-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{DF_n = \log (N_{n,d-cubo}) / \log (2^n)}$$

Imagens	Dimensão	Divisões	N_{n,d-cubos}	Log (N_{n,d-cubos})	Log 2n	DF_n
Binárias	2	1	4	Log (4)	Log (2)	2
		2	16	Log (16)	Log (4)	2
		3	64	Log (64)	Log (8)	2
Em escala de cinza	3	1	8	Log (8)	Log (2)	3
		2	64	Log (64)	Log (4)	3
		3	512	Log (512)	Log (8)	3
-	4	1	16	Log (16)	Log (2)	4
		2	256	Log (256)	Log (4)	4
		3	4096	Log (4096)	Log (8)	4
Coloridas	5	1	32	Log (32)	Log (2)	5
		2	1024	Log (1024)	Log (4)	5
		3	32768	Log (32768)	Log (8)	5
Satélite	6	1	64	Log (64)	Log (2)	6
		2	4096	Log (4096)	Log (4)	6
		3	262144	Log (262144)	Log (8)	6
	...	...	...	...	...	...

Resultados Experimentais

- ❑ DF experimental de imagens binárias
- ❑ DF experimental de imagens em escala de cinza
- ❑ DF experimental de imagens coloridas
- ❑ DF experimental de imagens de satélite

Demonstração

Conclusão

- A solução de muitos problemas para identificação e classificação de regiões depende do tratamento adequado de duas informações relevantes presentes numa imagem: sua **cor e textura**.
- Muitos métodos para análise de texturas exigem cálculos intensos e complexos e, por isso, demandam tempo considerável e exigem grande capacidade de processamento.
- O emprego dos conceitos da geometria fractal para caracterização de texturas é uma área nova e promissora. Pois, através da estimativa da dimensão fractal de regiões é possível identificar e classificar texturas com grande simplicidade e eficiência.

- Todavia, os métodos existentes limitam-se a estimativa da dimensão fractal de imagens binárias e em escala de cinza. Por isso, este trabalho teve por objetivo apresentar uma nova idéia: **a identificação da textura em imagens multiespectrais ou multibandas.**
- Assim, é proposto um método, denominado de **CDC** (*Contagem de D -Cubos*), que estende os conceitos expostos pelos outros métodos, **permitindo estimar a dimensão fractal de imagens de qualquer dimensão.**
- Este trabalho empregou imagens multiespectrais de sensoriamento remoto por serem estas compostas por diversas bandas, que podem ser visualizadas na forma de composições coloridas de três bandas associadas aos canais Red, Green e Blue.

- Tais composições, capazes de sintetizar numa única imagem uma grande quantidade de informação, facilitam a interpretação de alvos através da representação dessa informação em diferentes cores.
- **A contribuição maior do método CDC está na ampliação da capacidade de distinção de regiões.** Essa distinção, antes baseada no conhecimento do comportamento dos alvos para cada banda espectral aliada a adequada combinação das cores, agora tem ampliada suas possibilidades de identificação, através da análise de sua informação textural pela DF combinada das diversas bandas.

- A possibilidade de caracterização de texturas em imagens multiespectrais, **não se limita tão somente às imagens de sensoriamento remoto orbital**, ainda que esta tenha inúmeras aplicações práticas em áreas ambientais, científicas e militares, **mas também, abre caminho para uma gama de aplicações nos mais diversos campos do conhecimento, cuja identificação e classificação de regiões em imagens coloridas tornam-se necessárias.**